

連検定について

藤山英樹

2004年2月16日

1 連検定

実験経済学では、探索的に被験者の行動パターンを発見する事がある。その時に、有効となるのが連検定である。本稿ではこれを紹介する。なお、本稿の連検定についての解説は、Gibbons and Chakraborti, 'Tests Based on Runs' (in "Nonparametric Statistical Inference, 3rd edition", 1992, chap 3, Marcel Dekker, Inc. 今は第4版が出ている。) に大きく依拠している¹⁾。

1.1 用語

例えば「協力」と「非協力」という異なる2つの事象の連鎖を考える。全体の連鎖の数を n として、一方のタイプの起こった事象を n_1 とする。他方のタイプの起こった事象を n_2 とする。もちろん $n = n_1 + n_2$ が成立する。

連 (run) とは同じタイプの事象をひとくくりにしたものである。例えば、タイプ1を O とタイプ2を X と記して、6回の試行を考える。このとき、 $OOXXO$ となれば、それぞれ、 OO , XX , O が連となる。

タイプ i についての連の個数を r_i で記す。先の例では $r_1 = 2, r_2 = 1$ となる。タイプにかかわらず連の総数を $r \equiv r_1 + r_2$ で記す。先の例では $r = 2 + 1 = 3$ となる。

今、タイプ1の事象の数 n_1 とタイプ2の事象の数 n_2 を所与とする。ここで、タイプ1とタイプ2の事象の出方 (並べ方) については様々に考えられる。

仮定 1.1.1 タイプ1の事象の数 n_1 とタイプ2の事象の数 n_2 を所与のもと、実現する個々の出方 (並べ方) の出る確率は等しいとする。

以上をここでは課す。

先の例では、タイプ1の事象の数 $n_1 = 3$ 、タイプ2の事象の数 $n_2 = 2$ が所与となっており、 $OOXXO$ という全体の連鎖が生まれた。しかし、 $XOXOO$ も $OXOOX$ など、他に $n_1 = 3, n_2 = 2$ を満たす連鎖も考えられる²⁾。これらが全て等確率で実現すると考えるのである。

n_1 と n_2 が所与のもとで、出現する試行の連鎖は様々であり、その試行の連鎖にともない、様々な r_1 と r_2 が得られる。これより、 r_1 と r_2 を確率変数と考えることができる。 r_1 と r_2 は実現値として考え、確率変数としては、それぞれ、 R_1 と R_2 と記すことにする。 $r \equiv r_1 + r_2$ についても、同様に確率変数として R という

¹⁾ この文献を紹介してくださった松井敬獨協大学教授に感謝申し上げます。

²⁾ より正確には $10 = \frac{5!}{3!2!}$ とおりの組み合わせがある。

記号をもちいる．

1.2 連の総数についての検定

補題 1.2.1

n 個の事象を r 個の連に分けるような組み合わせの数は，

$$\binom{n-1}{r-1} \quad (1)$$

となる．事象と連の関係より $n \geq r$ という条件が課せられる．

証明: n 個の事象を連に分けるとは，しきりをつけるということに他ならない．その事象にひとつのしきりをつくると，連の数は 2 つになる．したがって， n 個の事象を r 個の連に分けるためには， $r-1$ 個のしきりが必要となる．

また， n 個の事象の中に，しきりをおける候補は $n-1$ 個である．

以上より， n 個の事象を r 個の連に分けるとは， $n-1$ 個のしきりをおける候補から， $r-1$ 個の場所を選び，そこにしきりを置くことと同じことになる．

これは，組み合わせの数に他ならず，

$$\binom{n-1}{r-1} \quad (2)$$

通りとなる．

例 1.2.1

例えば $OOOO$ という事象の列を考える．つまり $n=4$ である．しきりを置く候補を「 \sim 」で示すと， $O\sim O\sim O\sim O$ となる．つまり， $3(=n-1)$ つあることがわかる．

さらに，いま 3 つの連を持つ事象の列をつくらうとする．このとき，1 番目と 3 番目に 2 つのしきりを入れると， $O|OO|O$ となり 3 つの連を持つ事象の列ができる．

他にも， $O|O|OO$ ， $OO|O|O$ という連をつくることができ，合わせて $3(=\binom{3}{2})$ 種類の連をつくることができる．

命題 1.2.1

それぞれのタイプについての実現した事象の数 n_1, n_2 を所与し, $n \equiv n_1 + n_2$ とする. 仮定 1.1.1 のもとで, 確率変数 R_1, R_2 についての結合確率関数は

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \frac{c \binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_2-1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (3)$$

となる. ここで

$$c = \begin{cases} 2 & r_1 = r_2 \text{ のとき} \\ 1 & r_1 = r_2 \pm 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4)$$

である. また, 事象と連の作り方から, $1 \leq r_1 \leq n_1$ かつ $1 \leq r_2 \leq n_2$ であり, r_1 と r_2 の大小関係は c の値を得るときの場合分けのケースに尽きる.

証明: 命題の仮定より, n_1, n_2, r_1, r_2 は所与である. また, 補題 1.2.1 より, タイプ 1 について, 連の組み合わせは,

$$\binom{n_1-1}{r_1-1} \quad (5)$$

となる. 同じように, タイプ 2 について, 連の組み合わせは,

$$\binom{n_2-1}{r_2-1} \quad (6)$$

となる.

タイプ 1 とタイプ 2 の連は互いに交互に現れる. さもなくば, 同じタイプの連が続けて出現するとそれは 1 つの連と数えられてしまうからである. したがって, r_1 と r_2 の関係は $r_1 = r_2$ もしくは $r_1 = r_2 \pm 1$ となる.

今 $r_1 = r_2$ の場合を考える. このときにはどちらのタイプをはじめにするかで, 2通りの並べ方がある. したがって,

$$2 \binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_2-1} \quad (7)$$

通りの並べ方ができる.

次に $r_1 = r_2 \pm 1$ である場合を考える. このときは, 数の多いタイプの連の中に, 数の少ない連を並べる事になる. したがって,

$$\binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_2-1} \quad (8)$$

通りの並べ方ができる.

他方で, タイプ 1 の実現数が n_1 で, タイプ 2 の実現数が n_2 なる, 組み合わせの数は

$$\binom{n_1+n_2}{n_1} = \binom{n}{n_1} \quad (9)$$

だけある.

また，個々の組み合わせが出る確率は，仮定 1.1.1 より，等確率である．したがって，それぞれのタイプの連が r_1 および r_2 となる確率は，組み合わせの数の比率と同じとなり，

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \frac{c \binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_2-1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (10)$$

が得られる．

命題 1.2.2

命題 1.2.1 で得られた結合確率関数の R_1 についての周辺確率関数は

$$f_{R_1}(r_1) = \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2+1}{r_1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (11)$$

となる．連の作り方より， $1 \leq r_1 \leq n_1$ である．

R_2 についても記号を置き換えるだけで同様に得られる．

証明: はじめにこの証明でもちいる組み合わせの演算公式：

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad (12)$$

を記しておく³⁾．

r_1 を所与として，直接に命題 1.2.1 の公式を利用可能な r_2 は $r_1 - 1, r_1, r_1 + 1$ のいずれかである．はじめに，以上のすべてが利用可能なケースを考える．

³⁾ 導出は

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \quad (13)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \frac{(n-(k-1))k}{(n-(k-1))k} \quad (14)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{k}{(n-(k-1))} \quad (15)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n! \frac{k}{(n-(k-1))}}{(n-k)!k!} \quad (16)$$

$$= \frac{n!(1 + \frac{k}{n-(k-1)})}{(n-k)!k!} = \frac{n! \frac{n+1}{n-(k-1)}}{(n-k)!k!} \quad (17)$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k} \quad (18)$$

である．

このとき,

$$f_{R_1}(r_1) \equiv \sum_{r_2} f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) \quad (19)$$

$$= f_{R_1, R_2}(r_1, r_1 - 1) + f_{R_1, R_2}(r_1, r_1) + f_{R_1, R_2}(r_1, r_1 + 1) \quad (20)$$

(他の r_2 は連のつくりかたより定義できない.) (21)

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_2-2}}{\binom{n}{n_1}} + \frac{2 \binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} + \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_2}}{\binom{n}{n_1}} \quad (22)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} \left(\binom{n_2-1}{r_2-2} + 2 \binom{n_2-1}{r_1-1} + \binom{n_1-1}{r_2} \right) \quad (23)$$

(ここで組み合わせの演算公式を思い浮かべて式を整理する.) (24)

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} \left(\binom{n_2-1}{r_2} + \binom{n_2-1}{r_1-1} + \binom{n_2-1}{r_1-1} + \binom{n_1-1}{r_2-2} \right) \quad (25)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} \left(\binom{n_2}{r_2} + \binom{n_2}{r_1-1} \right) \quad (26)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} \binom{n_2+1}{r_2} \quad (27)$$

(28)

ここで、所与の r_1 に対して、 r_2 が命題 1.2.1 の条件を満たさず、公式を利用できない場合を考える。ただし、ここで $\binom{n}{k}$ において、 $n < k$ でならば $\binom{n}{k} = 0$ であることを思い出す。

これからの証明の方針はそれぞれの場合について、連の定義から可能な項は式 (22) で尽くされているから、この式が命題 1.2.1 の式 (11) と同じになることを確認する。

はじめに、 $n_2 - 1 < r_1 - 2$ なる場合を考える。このときは、式 (22) の各項の分子が 0 となる。他方、 $n_2 - 1 < r_1 - 2 \iff n_2 + 1 < r_1$ であるから、式 (11) も 0 となる。つまり、両式の値は一致する。

つぎに、 $n_2 - 1 = r_1 - 2$ なる場合を考える。このとき、 $n_2 - 1 < r_1 - 1 < r$ となり、式 (22) の第 2 項と第 3 項は 0 となる。第 1 項は

$$\frac{\binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_1-2}}{\binom{n}{n_1}} = \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{r_1-2}{r_1-2}}{\binom{n}{n_1}} \quad (29)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (30)$$

となる。

他方、式 (11) も $n_2 - 1 = r_1 - 2 \iff n_2 + 1 = r_1$ に注意すると、

$$\frac{\binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2+1}{r_1}}{\binom{n}{n_1}} = \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{r_1}{r_1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (31)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (32)$$

となる。これより両式の値は一致する。

最後に, $n_2 - 1 = r_1 - 1$ なる場合を考える. このとき $n_2 - 1 < r_1$ であるから, 式 (22) の第 3 項は 0 となる. 第 1 項と第 2 項は

$$\frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2-1}{r_1-2} + 2\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} = \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{r_1-1}{r_1-2} + 2\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{r_1-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (33)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}(r_1-1) + 2\binom{n_1-1}{r_1-1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (34)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}(r_1+1)}{\binom{n}{n_1}} \quad (35)$$

となる.

他方, 式 (11) も $n_2 - 1 = r_1 - 1 \iff n_2 + 1 = r_1 + 1$ に注意すると,

$$\frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2+1}{r_1}}{\binom{n}{n_1}} = \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{r_1+1}{r_1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (36)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}(r_1+1)}{\binom{n}{n_1}} \quad (37)$$

となる. これより両式の値は一致する.

以上ですべての場合を考察し尽くしたことになり, 題意は示された.

命題 1.2.3

それぞれのタイプについての実現した事象の数 n_1, n_2 を所与し, $n \equiv n_1 + n_2$ とする. 仮定 1.1.1 のもとで, タイプを問わない連の数を示す確率変数 R についての確率関数は

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{2\binom{n_1-1}{r/2-1}\binom{n_2-1}{r/2-1}}{\binom{n}{n_1}} & r \text{ は偶数とする.} \\ \frac{\binom{n_1-1}{(r-1)/2}\binom{n_2-1}{(r-3)/2} + \binom{n_1-1}{(r-3)/2}\binom{n_2-1}{(r-1)/2}}{\binom{n}{n_1}} & r \text{ は奇数とする.} \end{cases} \quad (38)$$

である. また, 連の作り方から, $1 \leq r \leq n$ である.

証明: r が偶数の場合: r が偶数であるとする. このとき, r_1 と r_2 の関係より, $r_1 = r_2 = r/2$ が得られる.

命題 1.2.1 より,

$$f_R(r) = f_{R_1, R_2}(r/2, r/2) = \frac{2\binom{n_1-1}{r/2-1}\binom{n_2-1}{r/2-1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (39)$$

が得られる.

ここで $1 < r \leq n$ を満たすが, $n_i < r/2$ ($i=1$ or 2) なるケースを考察する. 例えば, $n_1 = 3, n_2 = 10$ つまり $n = 13$ として, $r = 8$ とするようなケースである. 結論から先に述べると, 得られた公式をそのままもちいればよい. この点を確認する.

$n_i < r/2$ ($i=1$ or 2) なる場合は, そのような連を構成する組み合わせはないのだから確率は 0 である. 得られた公式においても値が 0 となることを示す.

$n_i < r/2$ とする. このとき, $n_i - 1 < r/2 - 1$ が得られ, 偶数の場合の $f_R(r)$ の分子が 0 となる. ($\binom{n}{k}$ は $n < k$ ならば 0 となることを思い出す.)

r が奇数の場合： r が奇数であるとする．ここでの r_1, r_2 可能性としては， $r_2 = r_1 + 1$ と $r_2 = r_1 - 1$ が挙げられる．はじめは以上の 2 つの可能性において共に自然数の連の数が得られる場合について考えてゆく．

$r_2 = r_1 + 1$ なる場合を考える． $r = r_1 + r_2 = 2r_1 + 1$ から，

$$r_1 = \frac{r-1}{2} \quad (40)$$

$$r_2 = \frac{r+1}{2} \quad (41)$$

が得られる．このときの結合確率は命題 1.2.1 より，

$$f_R(r|r_2 = r_1 + 1) = f_{R_1, R_2} \left(\frac{r-1}{2}, \frac{r+1}{2} \right) \quad (42)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{\frac{r-1}{2}-1} \binom{n_2-1}{\frac{r+1}{2}-1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (43)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{\frac{r-3}{2}} \binom{n_2-1}{\frac{r-1}{2}}}{\binom{n}{n_1}} \quad (44)$$

が得られる．

同じように， $r_2 = r_1 - 1$ なる場合を考える． $r = r_1 + r_2 = 2r_1 - 1$ から，

$$r_1 = \frac{r+1}{2} \quad (45)$$

$$r_2 = \frac{r-1}{2} \quad (46)$$

が得られる．このときの結合確率は命題 1.2.1 より，

$$f_R(r|r_2 = r_1 - 1) = f_{R_1, R_2} \left(\frac{r+1}{2}, \frac{r-1}{2} \right) \quad (47)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{\frac{r+1}{2}-1} \binom{n_2-1}{\frac{r-1}{2}-1}}{\binom{n}{n_1}} \quad (48)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{\frac{r-1}{2}} \binom{n_2-1}{\frac{r-3}{2}}}{\binom{n}{n_1}} \quad (49)$$

が得られる．

r が奇数のときのあり得る場合は以上で尽きている．したがって， r が奇数のときの確率関数は

$$f_R(r) = f_R(r|r_2 = r_1 + 1) + f_R(r|r_2 = r_1 - 1) \quad (50)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{\frac{r-3}{2}} \binom{n_2-1}{\frac{r-1}{2}}}{\binom{n}{n_1}} + \frac{\binom{n_1-1}{\frac{r-1}{2}} \binom{n_2-1}{\frac{r-3}{2}}}{\binom{n}{n_1}} \quad (51)$$

$$= \frac{\binom{n_1-1}{\frac{r-3}{2}} \binom{n_2-1}{\frac{r-1}{2}} + \binom{n_1-1}{\frac{r-1}{2}} \binom{n_2-1}{\frac{r-3}{2}}}{\binom{n}{n_1}} \quad (52)$$

となる．

最後に， r_1, r_2 についてのあり得る場合である $r_2 = r_1 + 1$ と $r_2 = r_1 - 1$ において，自然数の連が定義できないケースを考える．

例えば, $n_1 = 4, n_2 = 5$ として, $r = 9$ とする場合である. このときは, $r_1 = 4, r_2 = 5$ のときはあり得るが, もう一つのあり得る場合である, $r_1 = 5, r_2 = 4$ となる場合は, これを満たす連をつくることができない.

他の例としては, $n_1 = 3, n_2 = 10$ として, $r = 11$ とする場合である. このときは $r_1 = 5, r_2 = 6$ も $r_1 = 6, r_2 = 5$ も, これを満たす連をつくることができない.

しかしながら, 以上のような場合も含めて $1 < r \leq n$ なる r の全てに先に得られた公式を当てはめても良い. この点を以下に確認する. 結局あり得る場合を全て調べることにする. つまり, $r_2 = r_1 - 1$ において, $n_1 < r_1$ となる場合と $n_2 < r_2$ なる場合とまた, $r_2 = r_1 - 1$ において, $n_1 < r_1$ となる場合と $n_2 < r_2$ なる場合の全てを調べる. そして, 各場合において, 条件つき確率関数が 0 (いいかえると, 条件を満たす組み合わせの数が 0) となることを確認する.

場合 1: $r_2 = r_1 - 1$ かつ $n_1 < r_1$ とする. $r = r_1 + r_2 = 2r_1 - 1$ だから $r_1 = \frac{r+1}{2}$ となる. はじめの仮定 ($n_1 < r_1$) より $n_1 < \frac{r+1}{2}$ が得られる. これより, $n_1 - 1 < \frac{r-1}{2}$ が得られる. $r_R(r|r_2 = r_1 - 1) = \frac{\binom{n_1-1}{(r-1)/2} \binom{n_2-1}{(r-3)/2}}{\binom{n}{n_1}}$ であるから, 分子が 0 となり, 値も 0 となる. ($\binom{n}{k}$ は $n < k$ ならば 0 となることを思い出す.)

場合 2: $r_2 = r_1 - 1$ かつ $n_2 < r_2$ とする. $r = r_1 + r_2 = 2r_1 - 1$ だから $r_1 = \frac{r+1}{2}$ となり, はじめの仮定 ($r_2 = r_1 - 1$) より, $r_2 = \frac{r-1}{2}$ となる. はじめの仮定 ($n_2 < r_2$) より $n_2 < \frac{r-1}{2}$ が得られる. これより, $n_2 - 1 < \frac{r-3}{2}$ が得られる. $r_R(r|r_2 = r_1 - 1) = \frac{\binom{n_1-1}{(r-1)/2} \binom{n_2-1}{(r-3)/2}}{\binom{n}{n_1}}$ であるから, 分子が 0 となり, 値も 0 となる.

場合 3: $r_2 = r_1 + 1$ かつ $n_1 < r_1$ とする. $r = r_1 + r_2 = 2r_1 + 1$ だから $r_1 = \frac{r-1}{2}$ となる. はじめの仮定 ($n_1 < r_1$) より $n_1 < \frac{r-1}{2}$ が得られる. これより, $n_1 - 1 < \frac{r-3}{2}$ が得られる. $r_R(r|r_2 = r_1 + 1) = \frac{\binom{n_1-1}{(r-3)/2} \binom{n_2-1}{(r-1)/2}}{\binom{n}{n_1}}$ であるから, 分子が 0 となり, 値も 0 となる. ($\binom{n}{k}$ は $n < k$ ならば 0 となることを思い出す.)

場合 4: $r_2 = r_1 + 1$ かつ $n_2 < r_2$ とする. $r = r_1 + r_2 = 2r_1 + 1$ だから $r_1 = \frac{r-1}{2}$ となり, はじめの仮定 ($r_2 = r_1 + 1$) より, $r_2 = \frac{r+1}{2}$ となる. はじめの仮定 ($n_2 < r_2$) より $n_2 < \frac{r+1}{2}$ が得られる. これより, $n_2 - 1 < \frac{r-1}{2}$ が得られる. $r_R(r|r_2 = r_1 + 1) = \frac{\binom{n_1-1}{(r-3)/2} \binom{n_2-1}{(r-1)/2}}{\binom{n}{n_1}}$ であるから, 分子が 0 となり, 値も 0 となる. ($\binom{n}{k}$ は $n < k$ ならば 0 となることを思い出す.)

1.3 連の最大の長さについての検定

はじめに, 連の長さについてのいくつかの記号を定義しておく. 連の長さとは連に含まれる要素の個数のことである. 例えば 000 というような連は長さが 3 となる.

タイプ i の j なる長さをもつ連の数を r_{ij} とする. 例えば, タイプ 1 についての連の組 $0, 00, 0000, 0000$ について考えると, $r_{11} = 1, r_{12} = 1, r_{13} = 0, r_{14} = 2$ となる. 定義より,

$$\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} = r_i \quad (i = 1, 2) \quad (53)$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} j r_{ij} = n_i \quad (i = 1, 2) \quad (54)$$

が成立する.

命題 1.3.1

それぞれのタイプについての実現した事象の数 n_1 と n_2 を所与とする．また $n \equiv n_1 + n_2$ とする．仮定 1.1.1 が満たされるとする．このとき， $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n_2}$ を満たす連が実現する確率は

$$f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n_2}) = \frac{cr_1!r_2!}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}! \prod_{j=2}^{n_2} r_{2j}!\right) \binom{n}{n_1}} \quad (55)$$

となる．ここで

$$c = \begin{cases} 2 & r_1 = r_2 \text{ のとき} \\ 1 & r_1 = r_2 \pm 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (56)$$

である．ただし，連の定義より，各タイプ $i = 1, 2$ について $\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} = r_i$ ， $\sum_{j=1}^{n_i} jr_{ij} = n_i$ が成立しなければならない． r_1 と r_2 の大小関係は c の値を得るときの場合分けのケースに尽きる．

証明: $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n_2}$ が所与だから，その組み合わせが問題となってくる．各タイプの連の並べ方は重複を含む順列にほかならない．

タイプ 1 については， $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}$ だから，

$$\frac{(\sum_j^{n_1} r_{1j})!}{\sum_j^{n_1} r_{1j}!} = \frac{r_1!}{\sum_j^{n_1} r_{1j}!} \quad (57)$$

とおりの組み合わせが得られる．

タイプ 2 についても同様に， $r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n_2}$ だから，

$$\frac{(\sum_j^{n_2} r_{2j})!}{\sum_j^{n_2} r_{2j}!} = \frac{r_2!}{\sum_j^{n_2} r_{2j}!} \quad (58)$$

とおりの組み合わせが得られる．

以上の 2 つのタイプの連の組み合わせについて考察する． $r_2 = r_1 \pm 1$ の場合は，数の多いタイプの連の中に数の少ないタイプの連を組み合わせるだけなので，

$$\left(\frac{r_1!}{\sum_j^{n_1} r_{1j}!}\right) \left(\frac{r_2!}{\sum_j^{n_2} r_{2j}!}\right) \quad (59)$$

通りの組み合わせが得られる．

$r_2 = r_1$ の場合は，どちらのタイプの連をはじめに持ってくるかで 2 通り考えられるので，

$$2 \left(\frac{r_1!}{\sum_j^{n_1} r_{1j}!}\right) \left(\frac{r_2!}{\sum_j^{n_2} r_{2j}!}\right) \quad (60)$$

通りの組み合わせが得られる．

最後に全てのとりうる試行の並べ方は

$$\binom{n}{n_1} \quad (61)$$

である．

これより、仮定 1.1.1 のもとでは、 $r_2 = r_1 \pm 1$ の場合は、

$$\frac{\left(\frac{r_1!}{\sum_j^{n_1} r_{1j}!}\right) \left(\frac{r_2!}{\sum_j^{n_2} r_{2j}!}\right)}{\binom{n}{n_1}} \quad (62)$$

が n_1 と n_2 を所与として、 $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n_2}$ を満たす連が出る確率となる。

また、 $r_2 = r_1$ の場合は、

$$\frac{2 \left(\frac{r_1!}{\sum_j^{n_1} r_{1j}!}\right) \left(\frac{r_2!}{\sum_j^{n_2} r_{2j}!}\right)}{\binom{n}{n_1}} \quad (63)$$

が n_1 と n_2 を所与として、 $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n_2}$ を満たす連が出る確率となる。

以上の 2 式を整理すると、命題の主張が得られる。

命題 1.3.2

それぞれのタイプについての実現した事象の数 n_1 と n_2 を所与とする。また $n \equiv n_1 + n_2$ とする。仮定 1.1.1 が満たされるとする。このとき、 $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_2$ を満たす連が実現する確率は

$$f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_2) = \frac{c r_1! \binom{n_2-1}{r_2-1}}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \quad (64)$$

となる。ここで

$$c = \begin{cases} 2 & r_1 = r_2 \text{ のとき} \\ 1 & r_1 = r_2 \pm 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (65)$$

である。ただし、連の定義より、タイプ 1 について $\sum_{j=1}^{n_1} r_{1j} = r_1$ 、 $\sum_{j=1}^{n_1} j r_{1j} = n_1$ が、タイプ 2 について $1 \leq r_1 \leq n_2$ が成立しなければならない。 r_1 と r_2 の大小関係は c の値を得る時の場合分けのケースに尽きる。

証明: 証明の方針は命題 1.3.1 と全く同じである。

異なる点は、タイプ 2 の条件を満たす連の数を求めると、補題 1.2.1 より、

$$\binom{n_2-1}{r_2-1} \quad (66)$$

となる点である。

命題 1.3.3

それぞれのタイプについての実現した事象の数 n_1 と n_2 を所与とする。また $n \equiv n_1 + n_2$ とする。仮定 1.1.1 が満たされるとする。このとき、 $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}$ を満たす連が実現する確率は

$$f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}) = \frac{r_1! \binom{n_2+1}{r_1}}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \quad (67)$$

となる。ここでただし、連の定義より、 $\sum_{j=1}^{n_1} r_{1j} = r_1$ 、 $\sum_{j=1}^{n_1} j r_{1j} = n_1$ が成立しなければならない。

証明: 基本的な証明の方針は命題 1.2.2 と同じである. $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}$ から r_1 が決まる. これに対応して, あり得る r_2 が連の定義から, $r_1, r_1 \pm 1$ の 3 つの場合に尽きる.

はじめにこの 3 つの r_2 が全て定義できる場合から考察する.

$$f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}) \equiv \sum_{r_2} f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_2) \quad (68)$$

$$= f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_1 - 1) + f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_1) + f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}, r_1 + 1) \quad (69)$$

$$= \frac{r_1! \binom{n_2-1}{r_1-2}}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} + \frac{2r_1! \binom{n_2-1}{r_1-1}}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} + \frac{r_1! \binom{n_2-1}{r_1}}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \quad (70)$$

$$\left(\text{ここで } A = \frac{r_1!}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \text{ とおく.} \right) \quad (71)$$

$$= A \binom{n_2-1}{r_1-2} + 2A \binom{n_2-1}{r_1-1} + A \binom{n_2-1}{r_1} \quad (72)$$

$$= A \left(\binom{n_2-1}{r_1} + \binom{n_2-1}{r_1-1} + \binom{n_2-1}{r_1-1} + \binom{n_2-1}{r_1-2} \right) \quad (73)$$

$$= A \left(\binom{n_2}{r_1} + \binom{n_2}{r_1-1} \right) \quad (74)$$

$$= A \binom{n_2+1}{r_1} \quad (75)$$

$$= \left(\frac{r_1!}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \right) \binom{n_2+1}{r_1} \quad (76)$$

$$= \frac{r_1! \binom{n_2+1}{r_1}}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \quad (77)$$

となる.

残るは r_2 が定義できないケースも全て式 (77) となることを示す. そのためには, 各場合についてももとの定義から得られる式 (72) と式 (77) の値が等しくなることを示す.

はじめに与えられた n_1, n_2, r_1 において r_2 が定義できない状況を考察する. 例えば, $n_1 = 10, n_2 = 3, r_1 = 9$ となる場合である. $r_2 = 7, 8, 10$ は定義できない.

これは $n_2 - 1 < r_1 - 2$ なる場合である. ここで, 式 (72) の各項は 0 となり, この式の値は 0 となる. 他方, $n_2 - 1 < r_1 - 2 \iff n_2 + 1 < r_1$ となるから, 式 (72) の値も 0 となる.

以後, 順次各項が定義できる場合を考察する.

$n_2 - 1 = r_1 - 2$ なる場合を考える. このとき式 (72) は

$$A \binom{n_2-1}{r_1-2} = A \binom{r_1-2}{r_1-2} = A = \frac{r_1!}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \quad (78)$$

となる. 他方, 式 (77) は

$$A \binom{n_2+1}{r_1} = A \binom{r_1}{r_1} = A = \frac{r_1!}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \quad (79)$$

となり，両式は等しくなる．

$n_2 - 1 = r_1 - 1$ なる場合を考える．このとき式 (72) は

$$A \binom{n_2 - 1}{r_1 - 2} + 2A \binom{n_2 - 1}{r_1 - 1} = A \binom{r_1 - 1}{r_1 - 2} + 2A \binom{r_1 - 1}{r_1 - 1} \quad (80)$$

$$= (r_1 - 1)A + 2A \quad (81)$$

$$= (r_1 + 1)A \quad (82)$$

$$= (r_1 + 1) \frac{r_1!}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \quad (83)$$

となる．

他方，式 (77) は

$$A \binom{n_2 + 1}{r_1} = A \binom{r_1 + 1}{r_1} \quad (84)$$

$$= (r_1 + 1)A \quad (85)$$

$$= (r_1 + 1) \frac{r_1!}{\left(\prod_{j=1}^{n_1} r_{1j}!\right) \binom{n}{n_1}} \quad (86)$$

となり，両式は等しくなる．

補足としてコメントすると， $n_2 - 1 > r_1 - 1$ が成立すると，式 (72) の 3 つの項は全て定義できるので，はじめの議論に帰着する．

命題 1.3.3 をもちいると，連の最大数についての検定ができる．

はじめに理解が容易なように例からはじめる．いま， $n_1 = 5$ ， $n_2 = 6$ とする．このときタイプ 1 の連の最大数が $k (= 1, 2, \dots, 5)$ となる確率は次のように求められる．

タイプ 1 の連の最大数が 5 のとき，これを満たすようなタイプ 1 の連は $OOOOO$ だけである．これより $r_1 = 1$ が必ず満たされ， $r_{11} = 0$ ， $r_{12} = 0$ ， $r_{13} = 0$ ， $r_{14} = 0$ ， $r_{15} = 1$ となる．これより，タイプ 1 の連の最大数が 5 となる確率 ($P(5)$) は

$$P(5) = f(0, 0, 0, 0, 1) = \frac{1! \binom{6+1}{1}}{0!0!0!0!1! \binom{11}{5}} = \frac{\binom{7}{1}}{\binom{11}{5}} = \frac{1}{66} \doteq 0.015 \quad (87)$$

となる．

タイプ 1 の連の最大数が 4 の場合を考察する．これを満たすタイプ 1 の連は $OOOO$ と O の連をもつものだけである．これより， $r_1 = 2$ を満たされ， $r_{11} = 1$ ， $r_{12} = 0$ ， $r_{13} = 0$ ， $r_{14} = 1$ ， $r_{15} = 0$ となる．これより，タイプ 1 の連の最大数が 4 となる確率 ($P(4)$) は

$$P(4) = f(1, 0, 0, 1, 0) = \frac{2! \binom{6+1}{2}}{1!0!0!1!0! \binom{11}{5}} = \frac{2 \binom{7}{2}}{\binom{11}{5}} = \frac{1}{11} \doteq 0.090 \quad (88)$$

となる．

タイプ 1 の連の最大数が 3 の場合を考察する．これを満たすタイプ 1 の連の集合は OOO と OO の連をもつものと， OOO と O と O の連をもつものだけである．これより，前者の場合は $r_1 = 2$ を満たされ，後者の場合は $r_1 = 3$ となり，それぞれ，前者では $r_{11} = 0$ ， $r_{12} = 1$ ， $r_{13} = 1$ ， $r_{14} = 0$ ， $r_{15} = 0$ と，後者では

$r_{11} = 2, r_{12} = 0, r_{13} = 1, r_{14} = 0, r_{15} = 0$ となる．これより，タイプ 1 の連の最大数が 3 となる確率 ($P(3)$) は

$$P(3) = f(0, 1, 1, 0, 0) + f(2, 0, 1, 0, 0) \quad (89)$$

$$= \frac{2! \binom{6+1}{2}}{0!1!1!0!0! \binom{11}{5}} + \frac{3! \binom{6+1}{3}}{2!0!1!0!0! \binom{11}{5}} \quad (90)$$

$$= \frac{2! \binom{7}{2}}{\binom{11}{5}} + \frac{3! \binom{7}{3}}{2! \binom{11}{5}} = \frac{7}{22} \doteq 0.318 \quad (91)$$

となる．

タイプ 1 の連の最大数が 2 の場合を考察する．これを満たすタイプ 1 の連の集合は OO と OO と O の連をもつものと， OO と O と O と O の連をもつものだけである．これより，前者の場合は $r_1 = 3$ を満たされ，後者の場合は $r_1 = 4$ となり，それぞれ，前者では $r_{11} = 1, r_{12} = 2, r_{13} = 1, r_{14} = 0, r_{15} = 0$ と，後者では $r_{11} = 3, r_{12} = 1, r_{13} = 0, r_{14} = 0, r_{15} = 0$ となる．これより，タイプ 1 の連の最大数が 2 となる確率 ($P(2)$) は

$$P(2) = f(1, 2, 0, 0, 0) + f(3, 1, 0, 0, 0) \quad (92)$$

$$= \frac{3! \binom{6+1}{3}}{1!2!0!0!0! \binom{11}{5}} + \frac{4! \binom{6+1}{4}}{3!1!0!0!0! \binom{11}{5}} \quad (93)$$

$$= \frac{3! \binom{7}{3}}{2! \binom{11}{5}} + \frac{4! \binom{7}{4}}{3! \binom{11}{5}} = \frac{35}{66} \doteq 0.530 \quad (94)$$

となる．

タイプ 1 の連の最大数が 1 の場合を考察する．これを満たすタイプ 1 の連の集合は O の連を 5 つもつものだけである．これより，前者の場合は $r_1 = 5$ となり， $r_{11} = 5, r_{12} = 0, r_{13} = 0, r_{14} = 0, r_{15} = 0$ となる．これより，タイプ 1 の連の最大数が 1 となる確率 ($P(1)$) は

$$P(1) = f(5, 0, 0, 0, 0) \quad (95)$$

$$= \frac{5! \binom{6+1}{5}}{5!0!0!0!0! \binom{11}{5}} \quad (96)$$

$$= \frac{5! \binom{7}{5}}{5! \binom{11}{5}} = \frac{1}{22} \doteq 0.045 \quad (97)$$

となる．

以上より，連の最大数 k についての確率関数が得られることになり，この確率関数をもとに仮説検定ができる．例えば，有意水準 5 % の両側検定を考える．もし，連の最大数が 5 であれば， n_1 と n_2 を満たす各連が等確率に実現するという帰無仮説が棄却される．つまり，「等確率」ではなくあるバイアスをともなって試行結果が出現していると考えるのである．

最後に手順をまとめておくと，

1. 最大数 $k (1 \leq k \leq n_1)$ を定める．
2. 最大数が k となるような連の組み合わせを全て調べ，とりうる r_1 と対応する $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1}$ を求める．
3. 以上の全ての場合について $f(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n_1})$ をたし合わせる．

4. 以上の計算を全ての $k(1 \leq k \leq n_1)$ についておこない、確率関数を求める。
5. 得られた連と確率関数より、所与の有意水準から検定をおこなう。

となる。

1.4 連検定について

はじめに以下に述べる 2 つの検定と先の論文の方法との比較において、共通して指摘できる相違点を述べる。連検定では n_1 (協力の出た回数) と n_2 (非協力の出た回数) を所与とする。他方、先の論文の方法では、協力を出さず確率 p を標本平均で代理し、それを所与とする。

以上の点は、正確な p が得られれば、それを所与とすることがベストであるが、それを代理的な手法で補う場合はどちらの方法が優れているとは言い難いであろう。

1.4.1 連の数についての検定

非協力の部分にまで、検定がかかるのでより厳しい検定となる。協力の出方について考察の対象を限定する場合は、検定として不適切である。

1.4.2 最大数の連の検定について

この検定では協力の部分に注目して連の最大の長さについて検定をする。ただし、2 番目、3 番目の長さの連については考慮されない。本稿の対象は協力の出方であるが、最大の長さに限定をするものではない。2 番目、3 番目に長い協力の連もランダムからの逸脱として注目の対象となる。この意味では最大数の連の検定も十分なものとはいえない。

また、最大数をもつ連の場合分けについては機械的に求められず、それぞれ場合分けをひとつずつ求めてゆかなければならない。先の例であれば比較的容易であるが、実験においては $n_1 = 24$, $n_2 = 26$ であり、 $r = 8$ のような場合は場合分けが非常に多くなり、計算量のコストは無視できない。

以上のように、既存の連の検定についてはいずれも十分なものとはいえない。そのため、協力の連続についてのランダムからの逸脱を考える主旨に合う検定として、先の論文で示した方法は現在のところ消極的な意味で妥当といえる⁴⁾。

1.4.3 他の簡便法について

例からはじめる。はじめに 5 つの試行を考える。ここで 3 回以上協力が連続しない確率についての情報を得たい。概略を得るための分析で有効な簡便法を紹介する⁵⁾。

簡便法として、5 つの試行の中に、3 つのボックスは 3 つある。つまり、(000)00, 0(000)0, 00(000) である。このいずれのボックスでも 3 回連続して協力が出なければよい。

各ボックスにおける確率は独立ではないが、ここでは、簡便法として独立であるとして計算をすすめる。いま協力が出る確率を p とすると、すると協力が 3 回つづかない確率は $1 - p^3$ となる。これが、今 3 回あるから、 $(1 - p^3)^3$ が 3 回連続して協力が出ない確率の近似値となる。

はじめのボックスで 3 回連続して協力が出なければ、次のボックスにおいては 3 回連続して出る (条件つき)

⁴⁾ もちろん、連検定について、文献を十分にあたったわけではなく、今後、検討は続けてゆかなければならない。

⁵⁾ この簡便法は大浦さんに教えていただきました。ここに記して感謝します。

確率は、独立として考える $1 - p^3$ よりも、大きいと考えられる。(出にくい状況を前提とするので、出にくい確率は大きくなる。)

したがって、この簡便法で得た確率を q として正確な確率を q^* とすると、 $q^* > q$ となるであろう⁶⁾。

これより、簡便法から、3回の協力が連続する事が起きる確率は、少なくとも q はあるという解釈を得ることになる。これはこの簡便法は帰無仮説を棄却できない事を示すことにも使えそうである。例えば、 $q > 0.095$ ならば、 $q^* > q > 0.095$ より有意水準 5% で帰無仮説を棄却できなくなる、というようにである。

⁶⁾ いくつかの数値例では確認したが、証明はしていない。これを論文で使うならばここを証明しなければならない。